# 多因素影响分析的理论与方法

刘新建
（燕山大学经济管理学院经济系，河北秦皇岛 066004）
电子邮箱：lxj6309@126.com

**摘要：**多因素影响分析是经济数量分析的重要内容，有多种方法，其中，结构分解分析（SDA）在投入产出技术应用中被广泛使用。本文对 SDA 的缺陷做了深入说明，全面阐述新提出的多因素多阶影响分析（MMIA）技术。首先，定义了多因素影响分析和多因素多阶影响分析的基本概念，其次，阐明了多因素多阶影响分析与泰勒级数展开的关系，再次，提出了正向分析和逆向分析的概念和技术，最后，对 MMIA 在投入产出技术框架下的几个应用做了简要说明。

**关键词：**因素分析；多因素影响分析；泰勒展开；结构分解分析；投入产出

## Theory and Method of Multifactor Impact Analysis

Liu Xinjian
(School of Economics and Management, Yanshan University,Qinhuangdao 066004,China)

**Abstract** Multifactor impact analysis is an important part of economic quantitative analysis, and there are many methods. Among them, structural decomposition analysis (SDA) is widely used in the application of input-output techniques. In this paper, the defects of SDA are explained in depth, and the new multifactor and multi-order impact analysis (MMIA) technique is fully described. Firstly, the basic concepts of multifactor impact analysis and multifactor-multi-order impact analysis are defined. Secondly, the relationship between multifactor-multi-order impact analysis and Taylor series is clarified. Thirdly, the concepts and techniques of forward analysis and reverse analysis are proposed. Finally, several applications of MMIA under the input-output techniques framework are briefly described.

**Key words** factor analysis; multifactor impact analysis; Taylor expansion; structural decomposition analysis; input-output

## 1 引言

多因素影响分析传统上被称为因素分析，其实分两种，英文之名都为 Factor Analysis。一则实为多元统计分析中的因子分析，也被称为因素分析[1]，而“多因素分析”甚至被延伸到统计学中的一般多元统计分析[2][3]。因子分析是面对一类事物，从一系列观测指标的记录数据中，基于指标之间存在相关性，解析出这些指标的共同特征因子，未解释之变差归于一个指标的特殊因子，所用之分析工具是相关系数矩阵的特征值和特征向量。因子分析早期多用于医学和心理学研究，现在常用于评价研究中简化指标集合和确定权重。有的文献把逐步回归分析也称为因素分析。二则就是现今结构分解分析（SDA）的前身，名称即为因素分析，这种分析技术据说是二十世纪五十年代从苏联引进的，叫做“连环替代法”或“因素替换分析法”，属于经济活动分析或财务管理学科的内容[4]，起源于对物价指数和物量指数编制方法的借鉴。最早和最有影响的两种经济指数是广泛流行的拉氏指数和帕氏指数。两种指数的差异在于权数选择的不同。这种差异的存在实际上反映了分析结果的非唯一性。为了使计算结果不因权数的选择而变化，学者们又构造了多种指数（见表 1）。

自二十世纪八十年代末以来，以投入产出关系为基础发展的结构分解分析（SDA：Structural Decomposition Analysis）已被广泛用于经济指标的多因素影响分析[5][6]。SDA 方法正是源于拉氏指数和帕

氏指数。Ang 等提出了以 Divisia 指数为基础的 LMDI 方法（Logarithmic Mean Divisia index）[7][8]，这种方法在我国也获得了应用[9][10]。目前这些因素分析方法的重要应用是关于能耗或环境影响因素的分析。然而，这两种分析方法都有一个基本缺陷：没有把一种因素的影响与其他因素的变化彻底分开，而且对分解结果的经济意义解释总是不能令人满意，感到有些主观武断。这些困境的根本原因在于对因素影响分析的理论基础一直没有从本质上理清楚。下面的内容将首先解释流行方法的基本缺陷，然后建立新的因素影响分析模式和技术——多因素多阶影响分析。

表 1 传统因素分析指数公式

| 指数名称 | 提出者 | 提出时间 | 质量因子公式 $K_p$ | 数量因子公式 $K_q$ |
|---|---|---|---|---|
| 拉氏指数 | 德国 Laspeyres | 1864 | $\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}$ | $\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_1q_0}$ |
| 帕氏指数 | 德国 Paasche | 1874 | $\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}$ | $\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0}$ |
| 阿瑟·杨格指数 | 英国 Arthur Young | 1818 | $\frac{\sum p_1\frac{\sum q}{n}}{\sum p_0\frac{\sum q}{n}}$ | $\frac{\sum q_1\frac{\sum p}{n}}{\sum q_0\frac{\sum p}{n}}$ |
| 马歇尔—艾奇沃斯指数 | 英国 Marshall A. Edgeworth F.Y. | 1887 | $\frac{\sum p_1(q_0+q_1)/2}{\sum p_0(q_0+q_1)/2}$ | $\frac{\sum q_1(p_0+p_1)/2}{\sum q_0(p_0+p_1)/2}$ |
| 卓比史指数 | | | $\frac{1}{2}\left(\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}+\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}\right)$ | $\frac{1}{2}\left(\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0}+\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_1q_0}\right)$ |
| 费暄指数 | 美国 Fisher | 1927 | $\sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}}$ | $\sqrt{\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_1q_0}}$ |
| 最大公因数指数 | | | $\frac{\sum p_1q_{GCD}}{\sum p_0q_{GCD}}$ | $\frac{\sum p_{GCD}q_1}{\sum p_{GCD}q_0}$ |
| 迪威夏指数 | 法国 Divisia | 1924 | $e^{\int_{c_p}\frac{\sum q_tdp_t}{\sum p_tq_t}}$ | $e^{\int_{c_q}\frac{\sum p_tdq_t}{\sum q_tp_t}}$ |

注：本表根据徐国祥编著《统计指数理论及其应用》（中国统计出版社，2004）有关内容整理。



### 1.1 结构分解分析（SDA）的主要缺陷

SDA 的目的是要把一个主指标的变化分解成几个影响因素变化的贡献之和。因为一般情况下，在关系模型中，无法把各因素变化的影响独立分离，所以就借鉴了一般多因素指数体系的编制方法。一般文献中考察的都是主指标等于各构成因素相乘的情况，下面以三因素为例说明。

令 $V=xyz$，在只有一个统计对象单位时，从指数来说，有 $\lambda_V=\lambda_x\times\lambda_y\times\lambda_z=\frac{x^t}{x^0}\frac{y^t}{y^0}\frac{z^t}{z^0}$，但是，从变化量来分解，就没有这么简明，其完全分解应该是：

$$\begin{aligned}\Delta V&=V^t-V^0=x^ty^tz^t-x^0y^0z^0=(x^0+\Delta x)(y^0+\Delta y)(z^0+\Delta z)-x^0y^0z^0\\&=\Delta xy^0z^0+x^0\Delta yz^0+x^0y^0\Delta z+\Delta x\Delta yz^0+x^0\Delta y\Delta z+\Delta xy^0\Delta z+\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned}\qquad(1)$$

在式（1）中，有的项是多因素混合变化的结果，且看起来不可分离。为了把变化归因，SDA 仿照多因素拉氏指数或帕氏指数编制方法，提出了如下的基本分解模式：

$$\Delta V=E(\Delta x)+E(\Delta y)+E(\Delta z)=\Delta xy^0z^0+x^t\Delta yz^0+x^ty^t\Delta z\qquad(2)$$

式（2）表现出：三个因素的取值从初值依次被终值替代，故被称为连环替代法。虽然可以证明，式（1）和（2）的值相等，但是，对于这样的分解模式，有以下疑问：

（1）分解结果与各因素在模型中的排列顺序有关，即把 $x$、$y$、$z$ 在算式中顺序换一下，再应用式（2）计算各因素的贡献，其结果不同，那么，究竟应该采用哪种顺序分解？

（2）不同因素影响大小的测度基础不同，如式（2）中，$\Delta x$ 的系数是基期的，$\Delta z$ 的系数是报告期的，$\Delta y$ 的系数是两期混合的，那么，其贡献数值是可比的吗？

对于第一个疑问，人们给出了解决办法，就是把各种可能性排序结果进行平均，这样就消除了排序形式的影响，如对于上述三因素模型，采取以下的平均形式[11]：

$$E(\Delta x)=\frac{1}{3}(\Delta x)y_0z_0+\frac{1}{6}(\Delta x)y_0z_1+\frac{1}{6}(\Delta x)y_1z_0+\frac{1}{3}(\Delta x)y_1z_1 \tag{3}$$

$$F(\Delta y)=\frac{1}{3}x_0(\Delta y)z_0+\frac{1}{6}x_0(\Delta y)z_1+\frac{1}{6}x_1(\Delta y)z_0+\frac{1}{3}x_1(\Delta y)z_1 \tag{4}$$

$$E(\Delta z)=\frac{1}{3}x_0y_0(\Delta z)+\frac{1}{6}x_0y_1(\Delta z)+\frac{1}{6}x_1y_0(\Delta z)+\frac{1}{3}x_1y_1(\Delta z) \tag{5}$$

Dietzenbacher 和 Los (1998) 系统研究了各种排序解决方法及综合水平的选择，发现不同方法的结果可以有很大的差异[12]，Peter Rørmose（2010）在此研究基础上考虑了更多因素的灵敏性分析，并考虑了实物变量和经济变量的混合情况[13]。然而，无论采用怎样的平均分解形式，都无法消除这种分解模式的固有缺陷：分解方式选择的非客观性和无经济意义根据性，这与拉氏指数和帕氏指数的缺陷是一样的。但是，与单纯的价格或物量指数分析等不同，这种缺陷在这里的影响是根本性的，它完全破坏了 SDA 用于因素影响分析的学理依据。在根本上，不能把这里的各部分称为各因素对主指标变化的贡献。这同时与对第二个疑问的回答有关。对于这种连锁替代法的顺序缺陷，桑廷瑞在 1981 年就进行了深入的分析，指出其排在后面指标的影响计算中包含前面指标同时变化的贡献[14]。

对第二个疑问，还未见有人深入讨论过，安玉英曾指出[15]：“‘确定同度量因素的时间标准究竟是什么？是现实经济意义还是因素本身的变动，为什么两种指数采取两种截然不同的标准？’这是统计学界长期争论未获解决的一个老问题。”。从式（2）中可以看出：因素 $x$ 变化的系数是基期的值，因素 $z$ 变化的系数是报告期的值，这就相当于对 $x$ 和 $z$ 的变化影响贡献分别采用了基期权数系统和报告期权数系统，这样，两因素的贡献就是不可比的。如 $y$ 的贡献中掺和了 $x$ 的贡献，$z$ 的贡献中掺和了 $x$ 和 $y$ 的贡献。

综上分析，流行 SDA 作为因素影响分析模式是缺乏学理基础的。SDA 方法存在三方面错误：

（1）无论 SDA 的各种改进如何组合和平均各种不同因素排序的计算结果，他们都只是要消除不同排序间的数量差异，而没人给出物理或经济上的解释理由。

（2）在使用这种方法的过程中，人们忘记了分析的真正目的，变成了就数论数。实际上，SDA 的确切目的是为了获得每个因素影响因变量的数量性信息，为经济决策提供参考，不是为评价各因素的贡献大小，但是由于其结果的不确定性，其并没有实现这种目的。

（3）在一个有机系统中，一般情况下不能区分不同部分的作用大小。一只小螺丝钉脱落会毁掉整架飞机，因此无法用加权评价法把小螺丝钉与其它部件对飞机飞行安全的贡献大小区分出来！因此，用一种权重系统加权估计各种因素对因变量的贡献大小是没有意义的，更不用说对不同因素使用不同权重体系①。

### 1.2 LMDI 的主要问题

为了考察 LMDI 方法的合理性，先来看 Divisia 指数的合理性。Divisia 指数基本定义参见表 1，其推导过程如下：

令 $V=\sum_{k=1}^{m}p_kq_k=PQ$，P 和 Q 分别是一个 m 维向量，对应各个统计单元，设时间是连续变量，$P(t)$和 $Q(t)$连续可导，则

① 根据这里的逻辑，西方经济学中把生产要素的边际定价法则说成是根据要素的贡献定价也是不成立的，因为，每个边际项前面的系数是多种因素的综合结果，各因素对生产同一单位商品是不可分离的，因此无法单独计量各因素的贡献。在这里飞机螺丝钉的例子中，螺丝钉的价格也不是其边际作用的价值。由此，就可以对所谓的消费者剩余和生产者剩余理论做出批判。通俗的例子就是最后一个包子的比喻。

$$\lambda_V=\frac{V^t}{V^0}=EXP(\ln Q^tP^t-\ln Q^0P^0)=EXP\left(\int_{x:0\to t}\frac{1}{Q(x)P(x)}d\big(P(x)Q(x)\big)\right)$$
$$=EXP\left(\int_{x:0\to t}\frac{Q(x)}{Q(x)P(x)}dP(x)+\int_{x:0\to t}\frac{P(x)}{Q(x)P(x)}dQ(x)\right)=\lambda_P\times\lambda_Q \qquad (6)$$

单从形式上看，这个公式满足因素互换要求，即 $P$ 和 $Q$ 的顺序不影响结果，还满足连锁要求，即相隔多个时期的指数可以由中间时期的指数连乘而得。但是，很显然，在多统计单元即 $P$ 和 $Q$ 是多维向量时，每个因素的指数都会受到其它因素变化的影响，因此，这就与指数的原本含义——一个因素变化其它因素不变——发生了冲突。所以，这个指数公式表面上经济意义清晰，逻辑严格，实际上偏离了指数的本来含义。由 Divisia 指数发展出来的 LMDI 影响因素分析方法同样无法避免这样的缺陷。

在离散时间下，LMDI 的分解模型如下：

令 $V^t=\sum_{k=1}^{m}x_{1k}^tx_{2k}^t\cdots x_{nk}^t$， $\Delta V=V^t-V^0=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_{x_i}$，其中，

$$\Delta V_{x_i}=\sum_{k=1}^{m}L(V_k^t,V_k^0)\ln(\frac{x_{ik}^t}{x_{ik}^0})=\sum_{k=1}^{m}\frac{V_k^t-V_k^0}{\ln V_k^t-\ln V_k^0}\ln(\frac{x_{ik}^t}{x_{ik}^0}) \qquad (7)$$

由式（7）可以看出，每个因素 $x$ 的变化贡献都与所有因素共同引起的总变化 $V^0\to V^t$ 有关。这样，LMDI 的分解效果就与采用完全平均的 SDA 的分解效果在学理上是一样的，没有优劣之分。把这种分解称为各因素的贡献也不具有决策意义，因为一个因素的变化必须有其他因素的变化相配合，想用一个或几个因素的独立变化实现经济目标是不可能的。

### 1.3 中国学者关于多因素影响分析的研究

从文献搜索看，中国学者最早提出因素影响分析的是安玉英，在 1985 年[16]和 1986 年[15]分别发表一篇文章，1985 年叫做“用全增量的边际分析原理建立新的因素分析方法”，1986 年改为“偏增量因素分析方法”。安玉英的方法直接来源于函数的泰勒展开，把因变量的总变化叫做全增量，然后把全增量分解成各因素的一阶导数影响与其余部分之和，并且略去一定阶数之后的拉格朗日余项。安玉英认为其提出的是一种新的因素分析方法。

安玉英之后第二个研究这种方法的是杨启梓。杨启梓在 1995 年总共发表了内容相近的三篇文章[17][18][19]。杨启梓将其提出的方法分为三个部分。第一个部分叫“多元函数全增量统计分析的基本方法”，第二部分叫“微分增量分析法”，第三部分包括“分摊分析法”和“积分增量分析法”。第一部分又叫“偏增量分析法”，首先求得因变量的总变化，也叫全增量，其次，在函数中让各变量独立变化，求得其偏增量，叫做一个变量的基本影响值，再次，从全增量中减去全部变量的基本影响值之和，其差就是所有变量之间的交互影响总值。杨启梓认为，当因变量及各自变量的变化都较小时，可以用基本影响值之和代表全增量，因而可得各因素之影响，但是，当各变量变化幅度较大时，必须把交互影响值分摊到各自变量与基本影响值合并，其和叫做全影响值。所谓微分增量分析法又叫偏微分分析法，其也是建立在泰勒展开式基础上，但比安玉英进了一步，其基本影响值不仅考虑了一阶导数影响值，而且考虑了单独自变量的高阶导数项，并指出这与第一部分方法的对应关系，最后除去拉格朗日余项外，仍然用扣除法求得交互影响值。可以从泰勒展开式中看出交互影响值的组成结构（见后面第 3 节）。分摊分析法实际上就是对交互作用的几种分摊法，而所谓积分增量法（又叫线积分法）实质上就是 LMDI 方法。因为这些方法不是本文赞同的方法，就不详细介绍了。

## 2 多因素多阶影响分析模式的基本概念

为了解决 SDA 方法的缺陷问题，作者在 2013 年发表了多因素多阶影响分析（MMIA）技术[20]。在撰写第一篇论文时，尚未知悉安玉英和杨启梓的工作。

设有一个因变量$Y$，认为在$Y$与一组自变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 之间存在影响关系（这种关系不一定是直接的因果关系），且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，并有下面的函数关系：

$$Y=f(X_1,X_2,\cdots,X_n) \qquad (8)$$

记 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$， $X$ 的一个取值记为$x$，对应$Y$的一个取值记为$y$，则必有

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n) \qquad (9)$$

当一个（或几个）自变量的值变化时，引起的因变量$y$的变化叫做该（组）自变量对因变量的作用（或影响）。由函数关系可以分析$X_1,X_2,\cdots,\ X_n$的任意一个组合子集取值的变化对$Y$取值的影响。

所谓因素影响分析就是对引起因变量变化的各自变量因素的作用进行评估（不是评价！）或预测。因为单从数学关系出发不可能判断自变量与因变量之间是否因果关系，所以不叫影响因素分析，而叫因素影响分析。因果关系的确定需要实质理论分析。

记$\{X_1,X_2,\cdots,\ X_n\}$的若干元素的组合$\{X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_m}\}=M$ ($m\le n$)，记$M$的一个取值为$x^m$，$M$的一个取值变化为$\Delta x^m$，当$X$中与$M$对应的分量发生变化$\Delta x^m$而其它分量不变时，形成的$X$的取值记作$x^M$。

**定义 1** 记

$$I_M=\Delta y_M=\Delta y_m(x^M)=\Delta y_{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}}=\Delta y_m(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})=f(x^M)-f(x) \qquad (10)$$

$I_M=\Delta y_M=\Delta y_m(x^M)$称为$M$的$m$阶联合总作用。

**注：**$(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$的分量排列顺序与在$(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)$中相同。

**定义 2** $I_M=\Delta y^M=\Delta y^{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}}=\Delta y^m(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})=\Delta y^m(x^M)$被称为$(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$的$m$阶联合纯作用，当且仅当$(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$ ($m<n$)的分量同时变动，只要组合中有一个分量变化为 0，就有$\Delta y^{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}}=\Delta y^m(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})=0$。

**定义 3** 设$I_k^s$是从$M$中抽取的一个$k$阶组合，$I_M(k)$是所有从$M$中抽取的$k$阶组合组成的一个集合，$\Delta y^{I_k^s}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$表示组合$I_k^s$的$k$阶联合纯作用。令

$$\Delta y^k(x^M)=\Delta y^k(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})=\sum_{I_k^s\in I_M(k)}\Delta y^{I_k^s}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}) \qquad (11)$$

则$\Delta y^k(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$称为$(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$的$k$阶联合纯作用。$\Delta y^k(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})/\Delta y$称为$(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$对$y$变化的$k$阶纯作用贡献率。

定义 3 意味着，可以计算 X 的任意 m 个分量组合$M$的$k$（$k\le m$）阶联合纯作用，而$M$的全部元素的$m$阶总作用等于$M$的全部子组合的联合纯作用之和。当$m=n$时，式（10）就是$(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)$的（$n$阶）联合总作用，式（11）就是$(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)$的$k$阶联合纯作用，从而

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{n}\Delta y^k(x_1,x_2,\cdots,x_n) \qquad (12)$$

式（8）中的因变量和各个自变量可以是向量，甚至可以是矩阵。因为一阶作用的计算非常容易，因素组合的联合总作用也容易计算，所以，式（10）和（11）提供了从低阶算起的一个迭代公式：

$$\Delta y^M=\Delta y_M-\Delta y_{m-1}(x^M)=\Delta y_M-\sum_{k=1}^{m-1}\Delta y^k(x^M) \qquad (13)$$

有了一阶作用后，用式（13）可以计算全部二因素组合的二阶联合纯作用。总体 MMIA 的步骤包括：（1）列出全部各阶因素组合；（2）计算全部一阶作用；（3）计算全部因素组合的联合总作用；（4）顺序逐阶计算对应的联合纯作用。

对某个因素$x_t$，如果$\Delta y=\sum_{k=1}^{n-1}\Delta y^k(x_i|i\ne t)+\Delta y^{x_t}(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)$，则称$x_t$对$y$的作用与其它因素是可以分离的。如果对某个因素组合$(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$，

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{n-m}\Delta y^k(x_i|i\notin(i_1,\ i_2,\cdots,\ i_m))+\sum_{t=1}^{m}\Delta y^t(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}) \qquad (14)$$

则称$(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$对$y$的作用与其它因素是可以分离的。

如果各因素的作用都是可以分离的，那么，他们的任何联合纯作用都等于 0，这样，因变量的总变化等于全部自变量的一阶作用之和。

## 3 从泰勒展开式到多因素多阶影响分析模式

微积分中多元函数的泰勒展开式实际上就是一种因素影响分析模式。揭示这种分析模式与多因素多阶影响分析模式的关系对二者的认识都会更进一步。

### 3.1 泰勒级数与泰勒展开

分析从一元函数开始，多元函数的泰勒展开是一元基础上的叠加。因为一般书上很少给出比较完整的三元以上函数的泰勒展开式，所以，下面首先展示其形式。

（1）对一元函数 $y=f(x)$，其在 $x=x_0$ 附近的泰勒展开式为

$$\begin{aligned} y &= f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n+R_n(x) \\ &= f(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\Delta x)^k \end{aligned} \tag{15}$$

其中，$R_n(x)$ 被称为拉格朗日余项，即泰勒级数既定有限项后余下的部分。式（15）转换成增量形式即为

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n+R_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\Delta x)^k \tag{16}$$

式（15）表明，因变量的总变化可以用自变量变化的幂级数计算出来，这实际上等于 MMIA 公式中一个因素的一阶总作用，也是一阶纯作用。

（2）对于二元函数 $y=f(x_1,\ x_2)$，

$$\begin{aligned} y &= f(x_1,\ x_2)=f(x_1^0+\Delta x_1,\ x_2^0+\Delta x_2) \\ &= f(x_1^0,\ x_2^0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}[\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}]^k f(x_1,\ x_2)\Big|_{\substack{x_1=x_1^0\\ x_2=x_2^0}}+R_n(x_1,\ x_2) \\ &= f(x_1^0,\ x_2^0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_k^j\Delta x_1^j\Delta x_2^{k-j}\frac{\partial^k}{\partial x_1^j\partial x_2^{k-j}}f(x_1,\ x_2)\Big|_{\substack{x_1=x_1^0\\ x_2=x_2^0}}+R_n(x_1,\ x_2) \\ &= f(x_1^0,\ x_2^0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}[\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}]^k f(x_1,\ x_2)\Big|_{\substack{x_1=x_1^0\\ x_2=x_2^0}} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}[\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}]^k f(x_1,\ x_2)\Big|_{\substack{x_1=x_1^0\\ x_2=x_2^0}}+R_n(x_1,\ x_2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}[\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}]^k f(x_1,\ x_2)\Big|_{\substack{x_1=x_1^0\\ x_2=x_2^0}} \end{aligned} \tag{18}$$

（3）对于 $n$ 元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)$，如果其在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,\ x_n^0)$ 解析，那么，直接写出其增量展开式就是

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\cdots,\ x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,\ x_n^0) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n}\Delta x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^k f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)\right)\Bigg|_{\substack{x_1=x_1^0\\ \vdots\\ x_n=x_n^0}} \end{aligned} \tag{19}$$

### 3.2 泰勒展开与多因素多阶影响分析的对应

从一元函数的泰勒展开中可以发现，自变量对因变量的影响可以写成自变量的多阶导数与其增量同阶

幂乘积的求和。首先可以从二项式展开中分离出各自变量的单独影响，将每一个自变量的单独影响记作 $I_{x_k}$，则对于多元函数的单变量独立影响有

$$I_{x_k}=\sum_{p=1}^{\infty}(\Delta x_k)^p\frac{\partial^p}{\partial x_k{}^p}f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)\Big|_{\substack{x_1=x_1^0\\ \vdots\\ x_n=x_n^0}},\quad k=1,2,\cdots n \tag{20}$$

其次，二元函数的展开式中，除 $I_{x_1}$ 和 $I_{x_2}$ 外，剩下的部分都属于两个因素的联合影响，并且是纯影响，在形式上可以写成：

$$\Delta y-I_{x_1}-I_{x_2}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i+j=k}^{i\neq j}\mathrm{C}_k^i\Delta x_1^i\Delta x_2^j\frac{\partial^k}{\partial x_1^i\partial x_2^j}f(x_1,\ x_2)\Big|_{\substack{x_1=x_1^0\\ x_2=x_2^0}} \tag{21}$$

再次，对任意的自变量组合 $M=\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}\}$，各因素的联合纯作用可以表示为

$$I^M=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots j_m=k\\ j_t>0,t=1,2,\cdots m}}^{i_1\neq i_2\neq\cdots i_m}\binom{k}{j_1j_2\cdots j_m}\Delta x_{i_1}^{j_1}\Delta x_{i_2}^{j_2}\cdots\Delta x_{i_m}^{j_m}\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}^{j_1}\partial x_{i_2}^{j_2}\cdots x_{i_m}^{j_m}}f(x_1,\ x_2,\cdots x_n)\Big|_{\substack{x_1=x_1^0\\ \vdots\\ x_n=x_n^0}} \tag{22}$$

其中，$\binom{k}{j_1j_2\ldots j_n}=\frac{k!}{j_1!j_2!\ \ldots j_n!}$，$k!$ 表示 $k$ 的阶乘，$i_1\neq i_2\neq\ldots i_n$ 表示 $i_1i_2\ldots i_n$ 之间互不相等，而 $M=\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}\}$ 各元素的联合总作用就是

$$I_M=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j_1+j_2+\cdots j_m=k}^{j_t\geq 0,t=1,2,\cdots m}\binom{k}{j_1j_2\cdots j_m}\Delta x_{i_1}^{j_1}\Delta x_{i_2}^{j_2}\cdots\Delta x_{i_m}^{j_m}\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}^{j_1}\partial x_{i_2}^{j_2}\cdots x_{i_m}^{j_m}}f(x_1,\ x_2,\cdots x_n)\Big|_{\substack{x_1=x_1^0\\ \vdots\\ x_n=x_n^0}} \tag{23}$$

最后，将从 $X=\{x_1,x_2,\cdots,\ x_n\}$ 中抽取的所有 $m$ 个元素组合的联合纯作用相加就得到 $X$ 对 $Y$ 的 $m$ 阶联合纯作用，将 $X$ 对 $Y$ 的从 1 至 $n$ 阶纯作用相加就得到 $X$ 对 $Y$ 的 $n$ 阶联合总作用，也就是 $Y$ 的全增量。

可以看出，从一个函数的泰勒级数展开中既可以得到函数的各阶导数分量，也可以得到自变量的各种组合的联合纯作用，但是，这种计算的过程太复杂了，而且总是存在没有包含的余项。MMIA 方法不仅克服了泰勒级数展开法的余项问题，而且计算量大大简化，并且 MMIA 方法不要求函数具有可导性，甚至不要求函数具有连续性，仅要求因变量与自变量组之间存在确定的对应关系。此外，MMIA 方法中的变量既可以是标量也可以是向量，甚至可以是矩阵，如投入产出模型中的投入系数矩阵。至于泰勒级数展开具有的分离各阶导数分量优势，实际上并不是必要的，那是在过去人类的计算能力弱时，为了近似计算而要求的形式。在现代计算机技术已经高度发达的情况下，近似计算问题已经由机器自动解决了。

## 4 正向分析和逆向分析的区分

在前述 MMIA 方法的表述中，注意到，对自变量的变化没有考虑方向的规定，即没有区分是从 $x$ 变到 $x+\Delta x$ 还是从 $x+\Delta x$ 变到 $x$。这种区分在实证分析上是有意义的，且有两种情形：一是时序变化的情况，二是两个不同体而同类单元的差异比较。下面以讨论时序变化为主。

时间序列变化分析是多因素影响分析最常应用领域。以往的因素分析关注于一组因素单独变化其它因素不变时产生的效果，其实，同样可以分析一组因素不变其它因素变动时有怎样的效果，这就引出了正向分析和逆向分析的区分。这个区分是作者在完成国家统计局 2017 年投入产出表招标课题时提出的。

当时间从 0 变到 $t$，因变量从 $y(0)=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,\ x_n^0)$ 变到 $y(t)=f(x_1^t,x_2^t,\cdots,\ x_n^t)$，记

$$\Delta y=y(t)-y(0)=f(x_1^t,x_2^t,\cdots,\ x_n^t)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,\ x_n^0) \tag{24}$$

### 4.1 一阶分析

一个因素 $X_k$ 的作用，可以从两种方式考虑，一种方式是仅仅令 $X_k$ 变化而其它因素不变，第二种方式是考察没有 $X_k$ 变化会造成什么效果。第一种方式称为正向分析，第二种方式称为逆向分析。第一种方式的计算公式容易写出：

$$\Delta^+y^{x_k}=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_k^t,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_k^0,\cdots,x_n^0) \tag{25}$$

式（24）计算出来的直接就是因素 $X_k$ 的作用，对于第二种方式，直观的写法是

$$\Delta^- y^{x_k} = f(x_1^t, x_2^t, \cdots, x_k^0, \cdots, x_n^t) - f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_k^0, \cdots, x_n^0) \tag{26}$$

但是，可以看出，这个公式计算出来的实际上是其它因素的联合总作用，为了考察 $X_k$ 的作用，应从 $Y$ 的总变化中减去上式计算的量，即 $X_k$ 的作用为

$$\Delta^- y^{x_k} = f(x_1^t, x_2^t, \cdots, \ x_2^t, \cdots, x_n^t) - f(x_1^t, x_2^t, \cdots, \ x_k^0, \cdots, x_n^t) \tag{27}$$

$Y$ 的总变化体现了有 $X_k$ 参与的效果，式（25）是没有 $X_k$ 参与的效果，二者相减正说明了 $X_k$ 在 $Y$ 的变化中所起的作用量。

正向分析计算公式表明，在初始值的基础让一个因素发生变化产生的效果变化，所以，用于预测未来更适宜，但目前的因素分析中都是用于解释过去。如果把一组因素作为整体考察，相当于一个变量，这种说法也成立。

逆向分析计算公式说明，在已经形成的现状上，如果让一个因素回到过去因变量会有什么变化，所以，用于评估更合适，说明在过去演变中，有和没有某个或某一组因素会有怎样的效果。如果把有和没有该（组）因素参与的效果相比较（如相减），则在某个角度说明了该（组）因素的作用。

其实，正向分析公式和逆向分析公式从数学上看是没有区别的，相当于把$t$和 0 交换一下，再改变一下结果符号，但在现实事物分析中则有重大的意义差别，二者的计算结果不仅是符号的差别。

### 4.2 高阶分析公式

在 MMIA 方法中，一个自变量可以是向量，而且分析结果不因排序方式而发生变化，前面也已经指出，当把一组自变量作为一个整体看待时，其表现就如一个变量，所以，高阶分析的计算公式可以根据一阶分析的公式类推而出。

设从 $X = \{X_1, X_2, \cdots, \ X_n\}$ 中抽取的一个 $m$ 个因素组合是 $M = \{X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_m}\}$，则 M 对 Y 的正向总作用是

$$I^-{}_M = I^-{}_{M(m)} = \Delta^- y_M = f(X^0 \to M^t) - f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_k^0, \cdots, x_n^0) \tag{28}$$

式中，$X^0 \to M^t$ 表示在 $X$ 的分量中属于 $M$ 集合的自变量从 $x_{i_k}^0$ 变到 $x_{i_k}^t$，其它保持初值。对于 $M$，如果已知其 $m$-1 阶总作用，记作 $I_{M(m-1)}$，那么，其 m 阶纯作用就是

$$I^M = I^{M(m)} = I_{M(m)} - I_{M(m-1)} \tag{29}$$

因为一阶纯作用等于一阶总作用，而 $M$ 的 $m$ 阶总作用容易计算出，所以，式（29）也为计算高阶联合纯作用提供了一个易操作的递推公式。

高阶逆向分析的公式可以类比写出。$M$ 的逆向联合总作用为：

$$I^-{}_M = I^-{}_{M(m)} = \Delta^- y_M = f(x_1^t, x_2^t, \cdots, x_k^t, \cdots, x_n^t) - f(X^t \to M^0) \tag{30}$$

这里的 $X^t \to M^0$ 表示在 $X$ 的分量中属于 $M$ 集合的从 $x_{i_k}^t$ 变到 $x_{i_k}^0$，其它保持 t 期值。任意一个（或一组）因素$X_k$的逆向总作用由式（27）求得，$X$ 总的一阶作用值为

$$I_X^{-1} = \Delta^- y^1(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}) = \Delta^- y_1(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}) = \sum_{k=1}^{m} \Delta^- y^{x_{i_k}} \tag{31}$$

然后，用式（29）可以递推计算任意组合的高阶联合纯作用。

【例 1】三阶作用分析（只列出正向分析）。设考察因素组合为 $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$，易知，三个一阶作用为

$$\Delta^+ y^{x_{i_1}} = f(x_1^0, x_2^0, \cdots, \ x_{i_1}^t, \cdots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \cdots, \ x_{i_1}^0, \cdots, x_n^0) \tag{32}$$

$$\Delta^+ y^{x_{i_2}} = f(x_1^0, x_2^0, \cdots, \ x_{i_2}^t, \cdots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \cdots, \ x_{i_2}^0, \cdots, x_n^0) \tag{33}$$

$$\Delta^+ y^{x_{i_3}} = f(x_1^0, x_2^0, \cdots, \ x_{i_3}^t, \cdots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \cdots, \ x_{i_3}^0, \cdots, x_n^0) \tag{34}$$

$(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$的一阶总作用和一阶纯作用统一为：

$$\Delta^+ y_{(1)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})=\Delta^+ y^{(1)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})=\Delta^+ y^{x_{i_1}}+\Delta^+ y^{x_{i_2}}+\Delta^+ y^{x_{i_3}} \tag{35}$$

三个二阶总作用分别为：

$$\Delta^+ y_{x_{i_1}x_{i_2}}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Big|_{\substack{x_{i_1}=x_{i_1}^t,x_{i_2}=x_{i_2}^t\\ x_i=x_i^0,i\neq i_1,i_2}}-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0) \tag{36}$$

$$\Delta^+ y_{x_{i_2}x_{i_3}}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Big|_{\substack{x_{i_2}=x_{i_2}^t,x_{i_3}=x_{i_3}^t\\ x_i=x_i^0,i\neq i_2,i_3}}-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0) \tag{37}$$

$$\Delta^+ y_{x_{i_1}x_{i_3}}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Big|_{\substack{x_{i_1}=x_{i_1}^t,x_{i_3}=x_{i_3}^t\\ x_i=x_i^0,i\neq i_1,i_3}}-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0) \tag{38}$$

于是，三个二阶纯作用分别为

$$\Delta^+ y^{x_{i_1}x_{i_2}}=\Delta^+ y_{x_{i_1}x_{i_2}}-\Delta^+ y_1(x_{i_1},x_{i_2}),\quad \Delta^+ y^{x_{i_2}x_{i_3}}=\Delta^+ y_{x_{i_2}x_{i_3}}-\Delta^+ y_1(x_{i_2},x_{i_3}),\quad \Delta^+ y^{x_{i_1}x_{i_3}}=\Delta^+ y_{x_{i_1}x_{i_3}}-\Delta^+ y_1(x_{i_1},x_{i_3}) \tag{39}$$

$(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})$的二阶纯作用为：

$$\Delta^+ y^{(2)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})=\Delta^+ y^{x_{i_1}x_{i_2}}+\Delta^+ y^{x_{i_2}x_{i_3}}+\Delta^+ y^{x_{i_1}x_{i_3}} \tag{40}$$

$(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})$的二阶总作用为：

$$\Delta^+ y_{(2)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})=\Delta^+ y^{(1)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})+\Delta^+ y^{(2)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}) \tag{41}$$

一个三阶总作用为：

$$\Delta^+ y_{(3)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Big|_{\substack{x_{i_1}=x_{i_1}^t,x_{i_2}=x_{i_2}^t,x_{i_3}=x_{i_3}^t\\ x_i=x_i^0,i\neq i_1,i_2,i_3}}-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0) \tag{42}$$

于是，$(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})$的三阶纯作用为：

$$\Delta^+ y^{(3)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})=\Delta^+ y_{(3)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})-\Delta^+ y_{(2)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}) \tag{43}$$

并且，三阶总作用等于一阶、二阶和三阶纯作用之和：

$$\Delta^+ y_{(3)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})=\Delta^+ y^{(1)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})+\Delta^+ y^{(2)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})+\Delta^+ y^{(3)}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}) \tag{44}$$

【例 2】正向分析与逆向分析结果的对比。设有一个函数$Y=X_1e^{X_2}\mathrm{Ln}(X_3-X_1)$，已知$(x_1^0\ x_2^0\ x_3^0)=(2\ 3\ 7)$，$(x_1^t\ x_2^t\ x_3^t)=(4\ 5\ 10)$，此情景的正向分析与逆向分析结果见表 2.

表 2 正向分析与逆向分析结果对比

| | 正向分析 | | 逆向分析 | |
|---|---|---|---|---|
| 组合 | 总作用 | 纯作用 | 总作用 | 纯作用 |
| $X_1$ | 23.612 | 23.612 | 446.450 | 446.450 |
| $X_2$ | 413.071 | 413.071 | 919.729 | 919.729 |
| $X_3$ | 18.881 | 18.881 | 411.489 | 411.489 |
| 总一阶 | 455.563 | 455.563 | 1777.667 | 1777.667 |
| $X_1X_2$ | 587.541 | 150.859 | 980.149 | -386.029 |
| $X_2X_3$ | 552.580 | 120.629 | 975.418 | -355.800 |
| $X_3X_1$ | 79.301 | 36.808 | 585.959 | -271.979 |
| 总二阶 | 763.859 | 308.296 | 763.859 | -1013.808 |
| $X_1X_2X_3$ | 999.030 | 235.171 | 999.030 | 235.171 |
| 总三阶 | 999.030 | 235.171 | 999.030 | 235.171 |
| 纯作用合计 | | 999.030 | | 999.030 |
| 正向分析与逆向分析结果的贡献率对比 | | | | （%） |
| $X_1$ | 2.36 | 2.36 | 44.69 | 44.69 |
| $X_2$ | 41.35 | 41.35 | 92.06 | 92.06 |
| $X_3$ | 1.89 | 1.89 | 41.19 | 41.19 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 总一阶 | 45.60 | 45.60 | 177.94 | 177.94 |
| $X_1X_2$ | 58.81 | 15.10 | 98.11 | -38.64 |
| $X_2X_3$ | 55.31 | 12.07 | 97.64 | -35.61 |
| $X_3X_1$ | 7.94 | 3.68 | 58.65 | -27.22 |
| 总二阶 | 76.46 | 30.86 | 76.46 | -101.48 |
| $X_1X_2X_3$ | 100.00 | 23.54 | 100.00 | 23.54 |
| 总三阶 | 100.00 | 23.54 | 100.00 | 23.54 |
| 纯作用合计 | | 100.00 | | 100.00 |

由表 2 中可以看出，各因素及因素组合的正向和逆向作用存在显著的差异，这与函数的形式和因素的变化幅度有关，比如例 2 中，逆向分析中更加突出了 $X_2$ 的促进作用，这是因为其在函数中是指数函数形式。在逆向分析中还可以发现，虽然各因素的单独一阶作用都是正向的，但是，两因素的联合纯作用都是负向的，这正是系统论中"1+1 不等于 2"的典型体现。另外还发现，虽然三阶作用比较小，但也未必是可以忽略的。

需要说明一点，所谓正向作用与负向作用是相对于因变量的变化方向以贡献率看。如果因变量的变化是增长的，那么，因素作用为正时是促进增长，因素作用为负时是抑制增长；如果因变量的变化是减小的，那么，因素作用为正时是促进其减小，因素作用为负时是抑制其减小。

尽管 MMIA 技术比泰勒级数展开法求分解作用的计算量大幅缩减，但是，对于 n 个自变量，其组合数是 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$-1（含单因素），计算工作量随 n 呈几何级数增大。虽然随着阶次的升高，作用量不是单调下降的，但总体趋势还是下降的。所以，当 n 较大时，能用前 m 阶作用近似的，就不必计算更高阶的作用了。

### 4.3 同类异体对象的比较分析

在经济研究中，对不同地区差异的分析是一个重要的方面，对造成差异的因素影响的分析具有重要意义。比如在环境质量分析中，有多种污染物，如固体颗粒物、二氧化碳、二氧化硫、固体废弃物等等。表面上看，这些污染物的排放是独立的，但是，实际上，因为同一个生产过程会同时产生多种污染物，因此，一个部门在总体产业结构中的比重变化会影响多种污染物的排放量。另外，结构和总量都会影响污染物的排放，各产业之间还存在相互依赖，因而存在多因素的联合作用。相对于时间序列比较鲜明的正向分析和逆向分析的过程差别，不同对象的差异分析在这一点上的区别就容易被忽略。

从数学形式上看，把时间序列分析中的时间标识 0 和 t 换成不同对象分析的甲和乙或 A 和 B，没有任何计算上的困难和意义的改变，正向分析和逆向分析的结果也必然可能存在显著差异，但是，如何解释和应用分析结果制定政策就需要特别注意了。前面指出，对时序分析，正向分析宜用于预测，逆向分析宜用于解释过去，那么，对于不同对象分析，分析一个对象如何追赶先进地区，则宜用正向分析，把追赶地区作为"0"，把先进地区作为"t"。如果是并列的两个地区，就得指出谁和谁比，以谁为基准（作为"0"），然后，用正向分析。

## 5 MMIA 的应用

应用 MMIA 技术已经做过多种经济分析，足以说明这种方法的有效性和可行性。

### 5.1 人均粮食产量因素分析[20]

这是提出 MMIA 的第一篇文章中作为小例子展示的。

$$人均粮食产量R = 单位面积产量G \times \frac{粮食播种面积A}{年平均人口P} \tag{45}$$

对 1980 年至 2010 年的我国人均粮食产量变化做了因素分析，结论是：1980 年代，人均粮食产量提高的主要影响因素是单位面积产量；1990 年代，人均粮食产量下降的主要影响因素是人口数量，而对下降起显著抑制作用的是单位面积产量；二十一世纪的头十年，人均粮食产量继续提高，主要决定因素还是单位面积产量。分析中发现，二阶联合作用的影响还是很大的，有些与主要一阶因素作用相当。这说明，必须重视联合作用。

### 5.2 能耗强度因素影响分析[21]

基于投入产出表结构分析能耗强度的因素影响分析，是 MMIA 应用的第二个也是最重要的应用之一。基于投入产出表数据结构的能耗强度表达式可以有两个：

$$f=\frac{k_E'Q+Y_E}{G}=\frac{k_E'W}{e(I-A)W}+\frac{Y_E/N}{G/N}=\frac{k_E'W}{e(I-A)W}+\frac{y_E}{g} \quad (46)$$

$$f=\frac{k_E'Q+Y_E}{G}=\frac{k_E'(I-A)^{-1}Y}{G}+\frac{Y_E/N}{G/N}=k_E'(I-A)^{-1}C+\frac{y_E}{g} \quad (47)$$

其中：$G$—国内生产总值（GDP），$Y$—投入产出表中的最终使用合计列向量，$Q$—总产出列向量，$A$—直接消耗系数矩阵，$W$—总产出结构列向量，$P$—总产出合计，$e$—所有元素都为 1 的行向量，$k_E$—单位总产出的能耗，$Y_E$—生活总能耗，$C$—最终使用的产品结构列向量。

式（46）的特点是使用总产出表示的产业结构，式（47）的特点是使用最终使用的产品结构。利用不变价格投入产出表对我国 1997-2005 年能耗强度变化分析表明，对节能降耗的支持作用和抑制作用同时存在，均很显著，且技术节能的总体作用超过了各种抑制作用的总和，平均贡献率达到 120.9%，最终使得单位 GDP 能耗下降。

### 5.3 产业结构变动因素影响分析

在投入产出核算框架下，经济的产业结构有两种表示：总产出产业结构和增加值产业结构。对于表示和分析产业结构，名义量结构比实际量结构更有意义。基于投入产出表数据结构，两种表述法的产业结构计算公式如下[22]：

$$\mathbf{q}=\mathbf{BY}\frac{1}{\overline{Y}}\frac{\overline{Y}}{\overline{Q}}=\mathbf{By}\overline{m},\quad \mathbf{z}=\mathbf{By}-\langle\mathbf{By}\rangle\mathbf{A}'\mathbf{e} \quad (48)$$

其中，$\mathbf{q}$—总产出结构向量，$\mathbf{Y}$—最终使用向量，$\mathbf{z}$—最初投入向量，$\mathbf{A}$—直接投入系数矩阵，$\mathbf{B}$—列昂惕夫逆矩阵。在更精细的结构中，$\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{Z}$ 可能是由几个部分组成的矩阵，但上式没有考虑多个组成部分的情形，仅以向量表示。

可以看出，影响总产出结构的因素可以归结为三类，影响增加值结构的因素则归结为两类。这种结构分析既可以用于一个经济体不同时期产业结构的变化分析，也可以用于不同经济体的产业结构差异比较分析。利用 WIOD 世界投入产出表，对 2011 年中美两国的产业结构进行比较分析显示，基于总产出结构的差异，45%的部门主要是因为中间消耗系数的不同，38%的部门主要是因为最终需求结构的不同，其余 17%的部门主要是因为总增加值率的不同，这说明技术结构是总产出结构差异的主要影响因素，技术结构与产业结构之间存在着内在的必然联系。基于增加值结构的差异，34.5%的部门主要是因为中间消耗系数的不同，62%的部门主要是因为最终需求结构的不同，3.5%的部门主要是因为中间消耗系数和最终需求结构的协同影响，这些说明最终需求结构是增加值结构差异的主要影响因素。

更深入研究可以对最终使用做细分，如分成居民消费、公共消费、资本形成和净出口[23]：

$$\begin{aligned}y&=Y\overline{Y}^{-1}=(C_H+C_G+F+NX)\overline{Y}^{-1}\\&=(c_h\overline{C_H}+c_g\overline{C_G}+f\overline{F}+nx\overline{NX})\overline{Y}^{-1}\\&=(c_hy_h+c_gy_g+fy_f+nxy_{nx})\overline{Y}\overline{Y}^{-1}\\&=c_hy_h+c_gy_g+fy_f+nxy_{nx}\end{aligned} \quad (49)$$

其中，$y_h$、$y_g$、$y_f$ 与 $y_{nx}$ 分别表示居民消费、政府消费、资本形成和净出口的分项结构；$c_h$、$c_g$、$f$ 与 $nx$ 分别表示各项最终使用的产品结构。这时，对总产出结构的影响因素就有 10 个；从变化分解看，因为有些因素间没有协同作用，就共包含 10 个一阶纯影响、21 个二阶纯影响、16 个三阶纯影响和 4 个四阶纯影响。根据对中国 2002 至 2017 的 19 部门投入产出表所做分析，中间投入结构即直接消耗系数矩阵变化是影响产业结构的最主要因素，其次是居民消费结构。这说明，从长期来看，技术进步是影响经济结构的最重要的因素，也就是，从长期看，供给决定经济增长和结构。

### 5.4 经济增长多因素影响分析[24]

分析经济增长需要使用不变价投入产出表，下面的模型都基于不变价，在相应变量的上方加横，加*表示对应于局部闭模型。在局部闭模型下，GDP 的表达式为

$$
\begin{aligned}
\overline{GDP} &= e_n\left(\overline{C}+\overline{G}+\overline{F}+\overline{NX}\right) \\
&= e_{n+1}\left(\overline{A}^{*}\hat{\overline{Q}}^{*}\right)_{n+1} + e_n\left(\overline{G}_n+\overline{F}_n+\overline{NX}_n\right) \\
&= e_{n+1}\left[\overline{A}^{*} * diag\left[\left(1-\overline{A}^{*}\right)^{-1}\left(\overline{c}_{g_{n+1}}\overline{\overline{G}}_{n+1}+\bar{f}_{n+1}\overline{\overline{F}}_{n+1}+\overline{nx}_{n+1}\overline{\overline{NX}}_{n+1}\right)\right]\right]_{n+1} + e_n\left(\overline{c}_{g_n}\overline{\overline{G}}_n+\bar{f}_n\overline{\overline{F}}_n+\overline{nx}_n\overline{\overline{NX}}_n\right)
\end{aligned}
\tag{50}
$$

其中$\left(\overline{A}^{*}\hat{\overline{Q}}^{*}\right)_{n+1}$表示括号内矩阵的第 n+1 列，$e_n$、$e_{n+1}$分别表示元素都为 1 的 n 维和 n+1 维行向量。因为最终使用中的第 n+1 行实际都是 0，因此上面的模型共包含了七个因素，如果再把$\overline{A}^{*}$中的居民消费结构独立出来，就是八个基本因素。应用 MMIA 技术，可以将 GDP 的变化分解为八个一阶纯影响、十个二阶纯影响和三个三阶纯影响之和。

应用以上模型将中国经济从 2007 到 2017 分为两个阶段进行分析。从 2007 到 2012 年，GDP 五年实现了 62.68%的增长，年均增长 10.2%。在此阶段，资本形成总量对 GDP 增长的一阶贡献率是最大的，具有决定性影响；其次是直接消耗系数和政府消费总量，影响非常显著。这三者变化对 GDP 增长都是促进作用。另外，居民消费结构变化对 GDP 增长作用也十分显著，但作用是负的。这些结果说明，在此阶段，投资规模是经济增长的主导因素；以直接消耗系数为代表的经济技术的变化有利于 GDP 增长，以政府消费变化为代表的财政政策有效促进了经济增长。消费结构虽然对 GDP 增长起抑制作用，但居民消费结构的变化体现了人们生活质量的改善。从 2012 到 2017 年，GDP 五年实现了 38.99%的增长，年均增长 6.8%，显示中高速特征。在这个阶段，资本形成总量对 GDP 增长的一阶贡献率是最大的，但弱于前一阶段，其次是政府消费总量，这二者变化对 GDP 增长都是促进作用。另外，直接消耗系数和净出口总额变化对 GDP 增长作用也比较显著，但净出口总额变化的作用是负的，净出口结构的作用也是负的。这些结果说明，在此阶段，投资规模依然是经济增长的主导因素，起绝对重要作用，以政府消费变化为代表的财政政策也有效促进了经济增长；净出口总额和结构虽然对 GDP 增长起了抑制作用，但净出口的变化体现了我国经济增长对外部经济依赖度大幅降低。在对 GDP 增长的影响中，一阶作用是主要的，但是，某些高阶作用的影响也是显著的，如直接消耗系数与净出口结构的二阶联合纯影响达到正的 4.77%，直接消耗系数与净出口结构及净出口总额的三阶联合纯影响达到负的 2.74%。

基于共同的数据，用逆向分析法观察最终使用结构对经济增长的影响，政府消费和资本形成依然是经济增长的主导因素，净出口变化成为经济增长的主要不利因素，消费结构的作用从第一时期到第二时期快速下降并由负转正（从-46%到+4%）。这些变化一是符合经济增长理论，二是显示了我国经济转型的成效和趋势。相对于正向分析，逆向分析更突出了这些特征，显示其更适合对过去变化的解读。

### 5.5 基于两大部类划分的产业结构变化因素影响分析[25]

两大部类分析是马克思主义经济学研究的重要特征之一。投入产出分析的发展为研究两大部类问题提供了更强大的分析工具，既提供了量化实证研究的可能性，又可以将两大部类分解为更细的产业结构。在编制两大部类型投入产出表的基础上，有如下的基本模型：

$$
\begin{pmatrix} Q_{\text{I}} \\ Q_{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\text{I}} & A_{\text{II}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{\text{I}} \\ Q_{\text{II}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{\text{I}} \\ S_{\text{II}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} NX_{\text{I}} \\ NX_{\text{II}} \end{pmatrix} \tag{51}
$$

其中的罗马数字I和II分别表示第一部类和第二部类。在模型中做了如下假定：全部中间使用和全部固定资本形成都是第一部类，全部消费都是第二部类，存货和净出口按一定比例分解到第一部类和第二部类。由于原表的大多数部门都会被分解成分属于两大部类的两个部门，所以，两大部类型投入产出表相对于原表可能是 n×2 型投入产出表。由于第一部类和第二部类经济功能的不同，因此二者产业结构变化的因素影响分解模型也有差异，二者包含的各阶作用项数不同。

## 6 结束语

多因素影响分析是经济分析实践的重要领域，在已知函数关系的情况下，多因素多阶影响分析技术（MMIA）提供了一种精准客观完备的分析模式。或许有人认为应该说明 MMIA 与 SDA 分析结果的差异，本作者认为没有必要，因为对 SDA 的否定是理论上的，是科学原理上的否定，并且否定了对贡献率的通常评价性解释，不再依赖任何权重的设定。相对于安玉英和杨启梓的最初工作，MMIA 完成了技术的全面建立，提出了正向分析和逆向分析的划分，否定了通过分配交叉影响求取单因素完全影响值的必要性。相对于通过泰勒级数展开的分解模式，MMIA 是一种函数的有限量变化分解，不要求函数的可导性，计算工作量大幅减少且理论上无余项问题。投入产出技术对研究经济问题具有全面系统性的特点，与 MMIA 技术相结合为经济政策分析提供了最有效的分析模式。需要注意的两点是：第一，MMIA 应用的前提是获得准确的经济变量间关系式，或者是恒等式，或者是相当完备的统计拟合关系式；第二，作为一种数学模型，MMIA 提供的自变量对因变量的影响不宜直接称为原因对结果的影响，因果关系的确立需要专业理论分析。

最后，再次强调，虽然在 MMIA 的描述中也使用了“贡献率”一词，但是，这不是评价，仅仅是对变动效果的一个说法。比如，二阶因素组合贡献率必须是两个因素同时变化，这时，一阶作用必然存在，不会只存在二阶作用没有一阶作用。其它高阶作用也是如此，必然同时存在对应的低阶作用。



**参考文献：**

[1] 叶佩华，陈一百，万梅婷，郝德元. 教育统计学. 人民教育出版社，1988:338-373

[2] 曾祥龙,林久祥.多因素分析法在口腔正畸领域中的应用[J].国外医学·口腔医学分册,1984(3):156-159.

[3] 徐迪生.第九讲 多因素分析[J].学校体育,1984(4):52-55.

[4] 桑廷瑞.正确制定因素分析方法——兼评苏联“连环代替法”[J].东岳论丛,1981(03):67-76+51.

[5] Carlo Milana. The Input-Output Structural Decomposition Analysis of “Flexible” Production Systems. In: Michael L. Lahr and Erik Dietzenbacher (eds). Input-Output Analysis: Frontiers and Extensions, Essays in honor of Ronald E. Miller, London: Macmillan Press，2001.

[6] Skolka J. Input-output Structural Decomposition Analysis for Austria. Journal of Policy Modeling, 1989, 11(1):45-66.

[7] Ang B W, Liu F L. A New Energy Decomposition Method: Perfect in Decomposition and Consistent in Aggregation. Energy, 2001,26(6):537-548.

[8] Ang B W. The LMDI approach to Decomposition Analysis: A Practical Guid. Energy Policy, 2005, 33(7):867-871.

[9] 李国璋, 王双. 中国能源强度变动的区域因素分解分析——基于 LMDI 分解方法. 财经研究, 2008(8):52- 63.

[10] 徐盈之, 张全振. 中国制造业能源消耗的分解效应：基于 LMDI 模型的研究. 东南大学学报：哲学社会科学版, 2011(4):55-60.

[11] 李景华. SDA 模型的加权平均分解法及在中国第三产业经济发展分析中的应用. 系统工程, 2004(9)：69 -73.

[12] Dietzenbacher E,Los B. Structural decomposition techniques:Sense and sensitivity[J]. Economic Systems Research, 1998, 10(3):307-323.

[13] Peter Rørmose，2010，Structural Decomposition Analysis：Sense and Sensitivity，Statistics Denmark。

[14] 桑廷瑞.正确制定因素分析方法——兼评苏联“连环代替法”[J].东岳论丛,1981(03):67-76+51.

[15] 安玉英.论偏增量因素分析方法[J].中南财经大学学报,1986(4):108-115

[16] 安玉英. 用全增量的边际分析原理建立新的因素分析方法[J]. 统计与决策,1985(01):13-14.

[17] 杨启梓.关于确定性因素的统计分析法[J].统计与决策,1995(8):41-43.

[18] 杨启梓.论多元函数全增量的统计分析. 统计研究，1995, 12(3): 38-45.

[19] 杨启梓.论多元函数全增量分析法(上)[J].湖南商学院学报,1995(3):38-43.

[20] 刘新建. 多因素多阶影响分析模式及其应用[J]. 统计与决策, 2013(3):76-78.

[21] 宋辉, 刘新建. 中国能源利用投入产出分析. 中国市场出版社, 2013:37-40

[22] 刘新建. 经济理论分析的投入占用产出模式. 科学出版社，2018:120-122

[23] 杨茜. 中国产业结构演进及因素影响分析. 秦皇岛:燕山大学硕士学位论文，2022

[24] 李小文. 中国经济增长与需求结构演变关系研究. 秦皇岛:燕山大学硕士学位论文，2022

[25] 刘新建, 何泽德, 杨茜. 中国两大部类结构特征及其在新发展格局中的作用——基于投入产出表的分析[J]. 当代经济研究, 2022,320(4)